**Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"**
**Proba pe echipe, clasele VII-VIII**
**27 octombrie 2013**

**Soluţii**

**RUNDA I**

**Problema 1.** Mulţimea $A$ este formată din 5 numere întregi. Adunând în toate modurile posibile câte două elemente din mulţime, se obţin următoarele 10 sume: 0; 2; 4; 5; 7; 9; 10; 12; 14; 17. Să se determine mulţimea $A$.

**Soluţie:** Fie $A=\{a,b,c,d,e\}, a<b<c<d<e.$ Deoarece cele mai mici sume se obţin adunând $a$ cu $b$ şi $a$ cu c, obţinem $a+b=0$ şi $a+c=2.$
La fel considerând cele mai mari sume, avem $d+e=17$ şi $e+c=14.$
Notând cu $S=a+b+c+d+e=c+17.$
Suma celor 10 numere
este $4S=80\Rightarrow S=20\Rightarrow c+17=20\Rightarrow c=3,\ a=-1,\ b=1,\ e=11,\ d=6.$
Mulţimea $A=\{-1,1,3,6,11\}$.

**Răspuns:** $A=\{-1,1,3,6,11\}$

**Problema 2.** Să se determine $n,\ n\in\mathbb{N}$ astfel încât $2^{17}+17\cdot 2^{12}+2^n$ să fie pătrat perfect.
**Soluţie:** Fie $a\in\mathbb{N}$ pentru care
$2^{17}+17\cdot 2^{12}+2^n=a^2\Leftrightarrow 2^{12}\cdot\left(2^5+17\right)+2^n=a^2\Leftrightarrow 2^n=a^2-49\cdot 2^{12}\Leftrightarrow$
$2^n=\left(a-7\cdot 2^6\right)\cdot\left(a+7\cdot 2^6\right)\Rightarrow \exists p,q\in\mathbb{N}, p<q, p+q=n$ astfel încât
$\begin{cases}a-7\cdot 2^6=2^p\\ a+7\cdot 2^6=2^q\end{cases}\Rightarrow a=7\cdot 2^6+2^p=2^q-7\cdot 2^6\Rightarrow 2^q-2^p=7\cdot 2^7\Leftrightarrow$
$2^p\cdot\left(2^{q-p}-1\right)=7\cdot 2^7\Rightarrow p=7; q=10.$
In final, $a=9\cdot 2^6\Rightarrow n=17.$

**Răspuns:** n=17

**Problema 3.** Să se determine numerele întregi $n$ şi $m$ ştiind că
$n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)=m\cdot(m+1).$

**Soluţie:** $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)+1=\left(n^2+3n+1\right)^2$

$n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)+1=m\cdot(m+1)+1\Leftrightarrow\left(n^2+3n+1\right)^2=m^2+m+1\Rightarrow m^2+m+1=k^2, k\in\mathbb{N}.$

$4m^2+4m+4=4k^2\Leftrightarrow 4k^2-\left(4m^2+4m+1\right)=3\Leftrightarrow(2k-2m-1)\cdot(2k+2m+1)=3\Rightarrow$

$\begin{cases}2k-2m-1=-1\\2k+2m+1=-3\end{cases}\Rightarrow k=-1\notin\mathbb{N};$

$\begin{cases}2k-2m-1=1\\2k+2m+1=3\end{cases}\Rightarrow k=1\Rightarrow m=0;$

$\begin{cases}2k-2m-1=3\\2k+2m+1=1\end{cases}\Rightarrow k=1, m=-1$

$\begin{cases}2k-2m-1=-3\\2k+2m+1=-1\end{cases}\Rightarrow k=-1\notin\mathbb{N}$

Pentru m=0 $\Rightarrow n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)=0\Rightarrow n\in\{0,-1,-2,-3\}.$

Pentru m=-1 $\Rightarrow n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)=0\Rightarrow n\in\{0,-1,-2,-3\}.$

Prin urmare $(m,n)\in\{(0,0),(0,-1),(0,-2),(0,-3),(-1,0),(-1,-1),(-1,-2),(-1,-3)\}.$

**Răspuns:** $(m,n)\in\{(0,0),(0,-1),(0,-2),(0,-3),(-1,0),(-1,-1),(-1,-2),(-1,-3)\}.$